

спуску тощо [8].

**Висновки.** У даній статті розглянуті схемотехнічна та математична моделі робочої зони ДА, виявлені збурення, які надають власні коливання ДА під час своєї роботи, запропоновані підходи до побудови систем контролю та діагностики форсунок в режимі реального часу.

**Список літератури:** 1. *Кропачек О.Ю.* Методы и устройства контроля виброускорений стенок топливopовода высокого давления дизельных агрегатов: Дис. канд. Техн. наук: 05.11.13. – Харьков, 2004. – 214 с. 2. *Володин А.И., Блинов П.Н., Вихирев В.В., Попков В.В.* Контроль качества работы топливной аппаратуры // Двигателестроение. – 1990. – №5. – С. 48 – 51. 3. *Варбанец Р.А.* Мониторинг и расчет рабочего процесса судовых дизелей в эксплуатации: Дис. канд. Техн. наук: 05.04.15. – Одесса, 1997. – 185 с. 4. *Сисак Р.М.* Методи та системи статистичної діагностики дизель-генераторів на базі циклічних процесів: Дис. канд. Техн. наук: 05.11.16. – К., 2000. – 185 с. 5. *Мигущенко Р.П., Гусельников В.К., Валуйская О.Ю.* Классификация состояния форсунок дизель-генераторной установки по числовым характеристикам // Вестник НТУ «ХПИ». Сер. Электроэнергетика и преобразовательная техника. – Харьков. -2004. – Вып. 5. С. 88-92. 6. *Мигущенко Р.П., Кропачек О.Ю., Мараховська М.М., Тверитникова О.С.* Дослідження інформаційної моделі геліосистеми // Вісник НТУ «ХПІ». Сер. Автоматика та приладобудування. – Харків. – 2011. – Вип. 57. С. 133-137. 7. *Мигущенко Р.П., Кропачек О.Ю., Коваленко Д.А.* Анализ задачи построения системы отсчетов измерительного вибросигнала топливного насоса высокого давления дизельных установок // Вестник НТУ «ХПИ». Сер. Автоматика и приборостроение. – Харьков. – 2005. – Вып. 38. – С. 131-135. 8. Теория автоматического управления: В 2 ч. / Под ред. Воронова. – М., Высшая школа, 1977. – Ч. 2: Теория нелинейных и специальных систем автоматического управления. – 288 с.

*Надійшла до редколегії 10.04.2012*

УДК 539.3:534.1

**В.П. ОЛЬШАНСКИЙ**, д-р физ.-мат. наук, проф., ХНТУСХ, Харьков;  
**С.В. ОЛЬШАНСКИЙ**, канд. физ.-мат. наук, НТУ «ХПИ»

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОДОЛЬНОГО УДАРА ПО СТЕРЖНЮ С СОСРЕДОТОЧЕННОЙ МАССОЙ

Розглянута динаміка стержня з точковою масою, що зосереджена на його незакріпленому краї (торці), по якому відбувається непружний удар твердим тілом, яке рухається. Показано, що коефіцієнти динамічності, обчислені за теоріями Сен-Венана та Кокса відрізняються несуттєво в широкому інтервалі зміни параметрів тіл, які співударяються.

Рассмотрена динамика стержня с точечной массой, сосредоточенной на его незакрепленном крае (торце), по которому производится неупругий удар движущимся твердым телом. Показано, что коэффициенты динамичности, вычисленные по теориям Сен-Венана и Кокса, отличаются незначительно в широком интервале изменения параметров соударяющихся тел.

The dynamics of a beam with a point mass concentrated at its not assigned-edge, which is produced by inelastic impact by a moving solid. The dynamic coefficients calculated from the theories of Saint-Venant and Cox differs slightly in a wide range of parameters that satisfy the body collisions are shown.

**Введение.** Задача о неупругом продольном ударе по свободному торцу стержня относится к классическим [1]. Ее первое решение построил еще *Навье* (1823 г.) в форме ряда, который из-за медленной сходимости оказался неудобным для проведения расчетов [2]. Позже, *Сен-Венан*, используя метод *Буссинеска*, нашел ее другое решение в форме кусочно-непрерывной функции, учитывающее волновой характер деформирования стержня. Это решение разными методами обобщали *Е.Л. Николаи* и *А.И. Лурье* [1]. К обсуждаемой задаче обращались и другие исследователи, в частности *В. Гольдсмит* [3] и *Н.А. Кильчевский* [2]. Здесь обобщается классическая постановка задачи учетом дополнительной точечной массы, жестко прикрепленной к свободному краю стержня, по которому производится неупругий удар твердым телом. Операционным методом строится решение обобщенной задачи в форме ряда. Использование компьютера снимает проблему вычисления массива корней частотного трансцендентного уравнения и определения динамических перемещений, которая существовала во времена Навье, а также позволяет сравнить результаты расчетов по различным теориям, включая элементарную энергетическую теорию Кокса, которую традиционно излагают в учебной и справочной литературе по сопротивлению материалов [4,5,6,7].

**Основная часть работы.** Пусть верхний край  $x = 0$  однородного прямолинейного вертикального стержня закреплен неподвижно, а на нижнем крае  $x = l$  прикреплена точечная масса  $M_*$ , как показано на рис. 1.

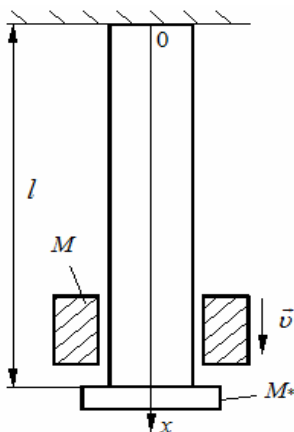


Рисунок 1 – Стержень с сосредоточенной массой, подвергнутой удару.

По ней ударяет падающее тело массой  $M$  со скоростью  $v$ . Определим влияние  $M_*$  на динамику стержня.

Следуя [9], построим изображение функции *Грина*  $G(x, p)$ , решив урав-

нение растяжения-сжатия стержня, записанное в пространстве изображений по Карсону

$$\frac{d^2 G}{dx^2} - \frac{p^2}{c^2} G = 0. \quad (1)$$

Здесь  $c = \sqrt{E/\rho}$  – скорость продольной волны;  $E, \rho$  – соответственно модуль упругости и плотность материала стержня;  $p$  – параметр интегрального преобразования.

Изображение функции влияния подчиняем граничным условиям:

$$G(0, p) = 0; \quad \left. \frac{dG(x, p)}{dx} \right|_{x=l} = \frac{1}{EF}, \quad (2)$$

в которых  $F$  – площадь поперечного сечения стержня длиной  $l$ .

Решение краевой задачи (1), (2) имеет вид:

$$G(x, p) = \frac{l^2}{M_0 c^2 \zeta} \frac{\operatorname{sh}(\zeta x l^{-1})}{\operatorname{ch}(\zeta)}. \quad (3)$$

Здесь  $\zeta = \frac{pl}{c}$ ;  $M_0 = \rho F l$  – масса стержня.

Согласно теории Сен-Венана [8], изображение продольного перемещения стержня определяется выражением:

$$U(x, p) = M_* g G(x, 0) + \frac{M(g + \nu p) G(x, p)}{1 + (M + M_*) p^2 G(l, p)}, \quad (4)$$

в котором  $g$  – ускорение свободного падения.

Переход от (4) к оригиналу проводим с помощью второй теоремы разложения. Получаем ряд

$$u(x, t) = (M + M_*) g G(x, 0) + \sum_{K=1}^{\infty} \frac{M(g + \nu p_K) G(x, p_K)}{\frac{d}{dp} [p + (M + M_*) p^3 G(l, p)]_{p=p_K}} e^{p_K t}, \quad (5)$$

где  $p_K$  – корни трансцендентного уравнения:

$$1 + (M + M_*) p^2 G(l, p) = 0, \quad (6)$$

которое с учетом (3) преобразуется в:

$$1 + \chi_* \zeta \operatorname{th} \zeta = 0, \quad \chi_* = \frac{M + M_*}{M_0}. \quad (7)$$

Вычисляя производную знаменателя в (5) по  $p$ , с учетом (3) и (6), получаем

$$\frac{d}{dp} [p + (M + M_*) p^3 G(l, p)]_{p=p_K} = \chi_* \frac{l^2}{c^2} p_K^2 - \frac{1}{\chi_*} - 1. \quad (8)$$

Корни уравнения (7) чисто мнимые. Поэтому введя обозначения  $z = i\zeta$ ,  $i = \sqrt{-1}$ , вместо (7) будем решать уравнение:

$$tgz = \frac{1}{\chi_* z}. \quad (9)$$

Предельный переход  $p \rightarrow 0$  в (3) дает:

$$G(x, 0) = \lim_{p \rightarrow 0} G(x, p) = \frac{l^2}{M_0 c^2} \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{sh(\zeta x l^{-1})}{\zeta ch \zeta} = \frac{x}{EF}. \quad (10)$$

Учитывая мнимость корней  $p_K$  и выражение (10), разложение (5) преобразуем к виду:

$$u(x, t) = (M + M_*) \frac{gx}{EF} - \frac{2Ml}{cM_0} \sum_{K=1}^{\infty} \frac{[g \cos(\omega_K t) - v \omega_K \sin(\omega_K t)] \sin\left(\frac{\omega_K x}{c}\right)}{\omega_K \left(1 + \frac{1}{\chi_*} + \chi_* \frac{l^2 \omega_K^2}{c^2}\right) \cos\left(\frac{\omega_K l}{c}\right)}. \quad (11)$$

Здесь  $\omega_K = \frac{z_K c}{l}$ ;  $z_K$  – положительные корни уравнения (9).

Для вычисления перемещения стержня в сечении удара  $x = l$  из (9) и (11) следует более компактное разложение:

$$u(l, t) = (M + M_*) \frac{gl}{EF} - 2 \frac{\chi}{\chi_*} \sum_{K=1}^{\infty} \frac{g \cos(\omega_K t) - v \omega_K \sin(\omega_K t)}{\omega_K^2 \left(1 + \frac{1}{\chi_*} + \chi_* \frac{l^2 \omega_K^2}{c^2}\right)}, \quad (12)$$

в котором  $\chi = MM_0^{-1}$ ;  $\chi_* = \chi + \alpha$ ;  $\alpha = M_* M_0^{-1}$ .

Чтобы найти  $u_g = \max u(l, t)$  с помощью (12) нужно знать корни уравнения (9). Если ввести обозначение  $z_K = (k-1)\pi + \varepsilon_K$ , то  $\varepsilon_K$  не сложно находить итерациями по формуле:

$$\varepsilon_K^{(n+1)} = \arctg \frac{1}{\chi_* \left[ (k-1)\pi + \varepsilon_K^{(n)} \right]}. \quad (13)$$

в которой  $n = 0, 1, 2, \dots$  – номер итерации;  $k$  – номер корня.

Начальным приближением можно брать  $\varepsilon_K^{(0)} = 1$  или  $\chi_*^{-1}$ , когда  $\chi_* > 1$ .

Таким образом, вычисление  $z_K$  и частичной суммы ряда (12) на компьютере не вызывает затруднений.

Учитывая быструю сходимость ряда, из (12), в одночленном приближении, получаем выражение:

$$u_g = u_* + u_{CT} + 2\chi \frac{\sqrt{g^2 + (\nu\omega_1)^2}}{\omega_1^2 (1 + \chi_* + \chi_*^2 \zeta_1^2)}, \quad (14)$$

где  $u_* = M_* gl(EF)^{-1}$ ;  $u_{CT} = M gl(EF)^{-1}$ ;  $\omega_1 = z_1 cl^{-1}$ ;  $z_1$  – наименьший положительный корень уравнения (9).

В литературе по сопротивлению материалов [4,5,6,7] приближенное вычисление  $u_g$  предлагают проводить по формуле:

$$u_g = u_{CT} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{\nu^2}{g} \frac{1}{(1 + K_0 \chi^{-1}) u_{CT}}} \right), \quad (15)$$

в которой  $K_0$  – коэффициент приведения массы стержня к свободному краю.

С учетом наличия присоединенной массы эта формула преобразуется в:

$$u_g = u_* + u_{CT} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{\nu^2}{g} \frac{\chi}{(\chi_* + K_0) u_{CT}}} \right). \quad (16)$$

Формула (16) обобщает (15) и переходит в нее когда  $\chi = \chi_*$ ,  $M_* = 0$ .

Наличие изложенных теорий позволяет сравнить результаты, к которым они приводят.

Для проведения расчетов берем стальной стержень ( $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  Па;  $\rho = 7810$  кг/м<sup>3</sup>) длиной  $l = 1,2$  м и площадью поперечного сечения  $F = 4 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>. Коэффициент  $K_0$  в формуле (16), аналогично [4,7], задаем равным 1/3. Варьируем значения:  $\alpha$ ,  $\chi$  и  $\nu$ .

В частичной сумме ряда (12) вычисляем 100 членов.

Результаты вычислений  $z_K$  с помощью (13) записаны в табл. 1.

Таблица 1.

Значения  $z_K$  при разных  $\alpha$ ,  $\chi$  и  $k$

$k$	$\alpha = 0$		$\alpha = 1$		$\alpha = 3$	
	$\chi = 0,01$	$\chi = 1$	$\chi = 1$	$\chi = 2$	$\chi = 1$	$\chi = 2$
1	1,555245	0,860334	0,653273	0,547237	0,480659	0,434721
2	4,665765	3,425619	3,292310	3,243988	3,219099	3,203935
3	7,776374	6,437298	6,361620	6,335749	6,322705	6,314847
4	10,887131	9,529335	9,477486	9,460000	9,451223	9,445949
5	13,998090	12,645288	12,606014	12,592834	12,586231	12,582265
6	17,109308	15,771285	15,739719	15,729153	15,723862	15,720685
50	154,512451	153,944534	153,941299	153,940216	153,939667	153,939346
100	311,328491	311,020905	311,019287	311,018768	311,018494	311,018311

Анализ чисел в табл. 1 показывает, что при больших  $k$  корни  $z_k$  приближаются к значению  $(k-1)\pi$ . Например, при  $k=100: 99\pi \approx 311,0176$ , что незначительно отличается от чисел в последней строке.

Результаты вычислений  $u(l, t)$  по формуле (12) представлены на рис. 2, 3, 4.

Графики на рис. 2 построены при  $\chi=2$ ,  $v=3$  м/с и трех значениях  $\alpha=0, 1, 2$ . График, полученный при  $\alpha=0$ , проходит значительно выше графика, полученного при  $\alpha=2$ . Наличие сосредоточенной массы на краю стержня, по которому производится удар, уменьшает динамические перемещения стержня. Максимумы  $u(l, t)$  на рис. 2 имеют значения:  $(9,22; 7,61; 6,63) \cdot 10^{-4}$  м. Их расчет по формуле (16) дал близкие результаты:  $(9,10; 7,62; 6,69) \cdot 10^{-4}$  м, т. е. в рассмотренном примере имеем хорошее согласование двух теорий.

На рис. 3 нанесены графики  $u(l, t)$ , полученные при  $\alpha=1$ ,  $v=3$  м/с и разных  $\chi$ . Здесь при  $\chi=0,5; 1; 2; 3$   $\max u(l, t)$  равны соответственно  $(2,62; 4,62; 7,61; 9,93) \cdot 10^{-4}$  м. Их расчет по формуле (16) дает:  $(2,57; 4,56; 7,62; 10,03) \cdot 10^{-4}$  м. Расхождения результатов расчета по двум теориям здесь также незначительны.

О влиянии скорости удара на динамические перемещения стержня позволяет судить графики  $u(l, t)$  на рис. 4. Они рассчитаны по (12) при  $\alpha=0,5$ ,  $\chi=2,5$  м/с и трех значениях  $v=1, 2, 4$  м/с. Полученные максимальные  $u(l, t)$  на графиках равны:  $(3,18; 6,35; 12,67) \cdot 10^{-4}$  м. Теория Кокса

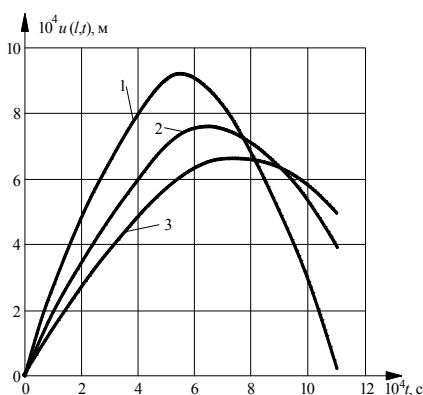


Рисунок 2 – Графики  $u(l, t)$  при разных  $\alpha: 1, 2, 3 - \alpha = 0; 1; 2$ .

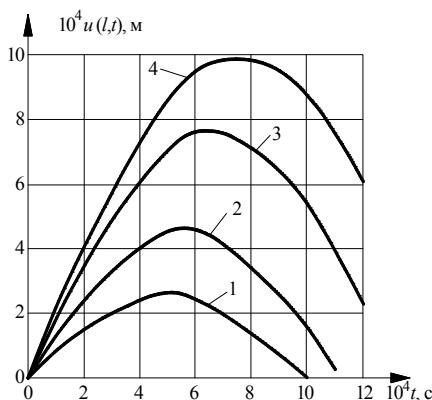


Рисунок 3 – Графики  $u(l, t)$  при разных  $\chi: 1, 2, 3, 4 - \chi = 0,5; 1; 2; 3$ .

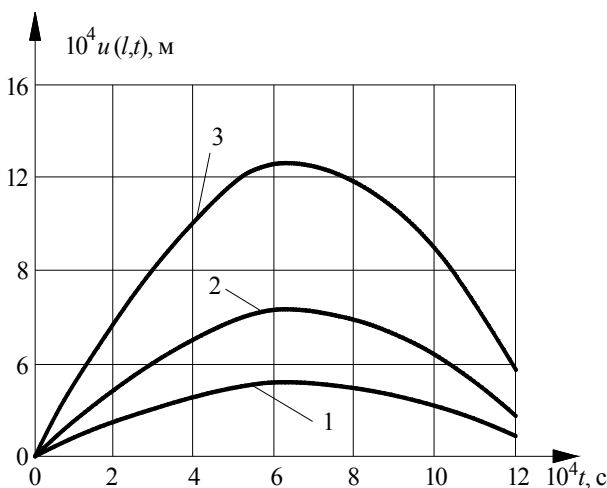


Рисунок 4 – Графики  $u(l, t)$  при разных  $\nu$ : 1, 2, 4 –  $\nu = 1$ ; 2; 3 м/с.

в этом примере дает:  $u_g = (3,19; 6,35; 12,69) \cdot 10^{-4}$  м, что близко к результатам расчета по теории *Сен-Венана*. Зависимость  $u_g$  от  $\nu$  почти линейная.

В формуле (16) задавали  $K_0 = 1/3$ . Но существуют разные способы определения этого коэффициента, которые приводят к разным  $K_0$ . Если использовать равенство кинетической энергии, то [2]:

$$K_0 = \int_0^1 \xi^2 d\xi = 1/3.$$

По равенству количества движения [2]:

$$K_0 = \int_0^1 \xi d\xi = 1/2.$$

Определяя  $K_0$  по равенству частот основного тона колебаний стержня и системы с одной степенью свободы, имеем  $K_0 = 4\pi^{-2}$ .

Используя указанные  $K_0$ , выясним какое из них приводит к лучшему согласованию двух теорий. В таблицах 2 и 3 записаны значения  $u_g$ , которые дают теории при  $\nu = 3$  м/с в широком интервале изменения  $\chi$ . Числа в табл. 2 получены при  $\alpha = 0$  (стержень без сосредоточенной массы), а в табл. 3 – при  $\alpha = 1$  (стержень с сосредоточенной массой, равной массе стержня).

Таблица 2.

Значения  $10^4 u_g$ , м, вычисленные по двум теориям при  $\alpha = 0$ .

$\chi$	По (12), 100 членов	По (14)	По (16) при:				
			$K_0 = 0$	$K_0 = 1/3$	$K_0 = 4\pi^{-2}$	$K_0 = 0,5$	$K_0 = 1$
0,1	0,70	0,87	2,20	1,06	0,98	0,90	0,66
0,3	2,08	2,38	3,80	2,62	2,48	2,33	1,83
0,5	3,41	3,60	4,91	3,81	3,65	3,47	2,84
1	6,04	5,90	6,95	6,02	5,86	5,67	4,91
2	9,23	9,04	9,83	9,10	8,96	8,79	8,03
3	11,41	11,38	12,04	11,42	11,30	11,15	10,43
4	13,23	13,31	13,91	13,36	13,25	13,11	12,44

Таблица 3.

Значения  $10^4 u_g$ , м, вычисленные по двум теориям при  $\alpha = 1$ .

$\chi$	По (12), 100 членов	По (14)	По (16) при:				
			$K_0 = 0$	$K_0 = 1/3$	$K_0 = 4\pi^{-2}$	$K_0 = 0,5$	$K_0 = 1$
0,1	0,59	0,58	0,67	0,59	0,57	0,55	0,48
0,3	1,67	1,61	1,83	1,64	1,60	1,56	1,38
0,5	2,62	2,54	2,84	2,57	2,52	2,46	2,20
1	4,62	4,53	4,92	4,56	4,49	4,40	4,02
2	7,61	7,60	8,03	7,62	7,54	7,44	6,96
3	9,93	9,99	10,44	10,03	9,94	9,84	9,34
4	11,88	11,94	12,45	12,05	11,97	11,87	11,36

Расчеты показали, что нет такого  $K_0$ , которое приводит к наилучшему согласованию теорий для всех рассмотренных  $\alpha$  и  $\chi$ . При одних  $\alpha$  и  $\chi$  имеем лучшее соответствие результатов расчета, когда  $K_0 = 1/3$ , а при других – когда  $K_0 = 4\pi^{-2}$  или  $K_0 = 0,5$ . По точности формула (14) не уступает формуле Кокса (16). Существенно, что при  $K_0 = 1$ , когда вся масса стержня перенесена в сечение удара (сосредоточенна на торце), формула (16) дает заниженные  $u_g$ . Эта же формула завышает  $u_g$ , если положить в ней  $K_0 = 0$ , т. е. пренебречь массой стержня. Поэтому  $u_g$ , вычисленные по теории Сен-Венана, удовлетворяют неравенствам:

$$u_1 \leq u_g \leq u_2,$$

в которых

$$u_j = \tilde{u} + u_* + u_{CT} \left( 1 + \sqrt{1 + v^2 \chi / [g(\chi_* + 2 - j) u_{CT}]} \right); \quad j = \overline{1; 2};$$



$\tilde{y} = M_0 g l (2 E F)^{-1}$  – статическое перемещение торца стержня под действием собственного веса.

Величиной  $\tilde{y}$  выше пренебрегали. Для принятых исходных данных:  $\tilde{y} = 2,627 \cdot 10^{-7}$  м.

**Выводы.** Расчеты показали, что теории *Сен-Венана* и *Кокса* хорошо согласуются при различных отношениях масс соударяющихся тел, а компактные формулы (14) и (16) вполне пригодны для расчета коэффициента динамичности перемещений при продольном механическом ударе.

**Список литературы:** 1. *Дурье А.И.* Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. – М.-Л.: Гостехиздат, 1951. – 431 с. 2. *Кильчевский Н.А.* Теория соударений твердых тел. – К.: Наукова думка, 1969. – 247 с. 3. *Гольдсмит В.* Удар. – М.: Гостройиздат, 1965. – 448 с. 4. *Писаренко Г.С., Квітка О.Л., Уманський Е.С.* Опір матеріалів. – К.: Вища школа, 2004. – 655 с. 5. *Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В.* Справочник по сопротивлению материалов. – К.: Наукова думка, 1988. – 736 с. 6. *Шкельов Л.Т., Станкевич А.М., Пошивач Д.В.* Опір матеріалів. – К.: ЗАТ «Віпол», 2011. – 456 с. 7. Справочник по сопротивлению материалов / Е.Ф. Винокуров, М.К. Балыкин, И.А. Голубев и др. – Мн.: Наука и техника, 1988. – 464 с. 8. *Филиппов А.П.* Колебания механических систем. – М.: Машиностроение, 1970. – 734 с.

*Поступила в редколлегию 29.03.2012*

УДК 534

**К.Ю. ПЛАКСІЙ**, студентка, НТУ «ХП»;  
**Ю.В. МІХЛІН**, д-р фіз.-мат. наук, проф. НТУ «ХП»

### **СТІЙКІСТЬ НЕЛІНІЙНИХ НОРМАЛЬНИХ ФОРМ КОЛИВАНЬ ПРУЖИННО-МАЯТНИКОВОЇ СИСТЕМИ ТА ПРОЦЕС ЗРИВУ ВЕРТИКАЛЬНОЇ ФОРМИ**

Нормальні форми коливань пружинно-маятникової системи отримано кількома асимптотичними методами. Досліджено стійкість форм коливань. Аналізується процес зриву вертикальних коливань за методикою Старжинського. Чисельне інтегрування демонструє досить високу точність аналітичних результатів.

Нормальные формы колебаний пружинно-маятниковой системы получены несколькими асимптотическими методами. Исследована устойчивость форм колебаний. Анализируется процесс срыва вертикальных колебаний по методике Старжинского. Численное интегрирование демонстрирует достаточно высокую точность аналитических результатов.

Nonlinear normal modes of the spring-pendulum system are obtained by few asymptotic methods. It is investigated a stability of the vibration modes. A process of the vertical vibrations disruption is analyzed by the Starzhinsky approach. Numerical simulation shows a good exactness of the analytical results.